Aus der Kgl. Universitäts-Kinderklinik München.
(Direktor: Professor Dr. M. v. Pfaundler.)

Das Körpergewicht von Münchner Schulkindern.

■ ■ ■

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

hohen medizinischen Fakultät

der

Kgl. bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt von

Awrum Skibinski.

■ ■ ■

München 1914.
RUDOLPH MÜLLER & STEINICKE.

Gedruckt mit Genehmigung der medizinischen Fakultät
der Universität München.

Referent: Professor Dr. M. v. Pfaundler.

Eduard Riedel hat an gegen 4000 Münchner Schulkindern die Verhältnisse der Körperlänge studiert und nach den Prinzipien der Kollektivmaßlehre dargestellt. Das bedeutsame Resultat dieser Arbeit war neben den ziffernmäßigen Ergebnissen die Feststellung, daß praktisch die Abweichungen der Körperlänge bei den untersuchten Schulkindern dem Gauß'schen Fehlergesetz folgen.

An der Sammlung des Materials zu diesen Forschungen in gleicher Weise beteiligt wie Riedel unternahm ich es, die Verhältnisse des Körpergewichtes analog zu prüfen und wiederzugeben. Die hiebei angewandten Prinzipien und Methoden sind teils in den Lehrbüchern über die Wahrscheinlichkeitsrechnung, teils in anthropometrischen Publikationen (wie beispielsweise jener von Stieda, Geißler-Uhlitzsch usw.), teils in der Riedel'schen Arbeit auseinandergesetzt. Ich kann mich daher unter Hinweis namentlich auf die letztere über diesen Gegenstand kurz fassen.

Die Aufgabe, die nach Sammlung einer größeren Zahl von anthropometrischen Maßen an verschiedenen Individuen erwächst, geht im wesentlichen dahin, die gewonnenen Zahlenreihen in möglichst knapper Form möglichst genau zu charakterisieren. Der Mediziner bedient sich zu diesem Behufe vielfach bloß des arithmetischen Mittelwertes und fügt höchstens noch die Maxima und die Minima an. Die dadurch gegebene Charakterisierung ist eine unzureichende und irreführende. „Man wird sich", sagt Stieda, „deshalb nicht wundern dürfen, wenn Mathematiker und Physiker über die Zahlenreihen und Mittelzahlen der Anthropometer lächeln und denselben jegliche Bedeutung absprechen." Daß der Mittelwert zur Charakterisierung einer Zahlenreihe nicht ausreicht, zeigt schon der Umstand an, daß er bei zwei sehr verschieden gebauten Zahlenreihen ein und derselbe sein kann. Der nackte Mittelwert läßt nicht ersehen, welchen Grad von Präzision er hat und wie Abweichungen von bestimmter Größe zu werten sind. Der Mittelwert sagt gar nichts darüber aus, was man die Struktur einer Zahlenreihe nennt.

Eine Anleitung zur genaueren Beschreibung von Zahlenreihen gewinnt man aus der Kollektivmaßlehre, einer Hilfsdisziplin, die in anderen Zweigen der Naturwissenschaften zum alltäglich gebrauchten Rüstzeuge gehört.

In jenen Wissenschaften finden die Regeln der Kollektivmaßlehre zunächst namentlich da Verwendung, wo eine bestimmte Größe mehrfach gemessen wurde und die Aufgabe erwächst, aus den von einander mehr oder weniger abweichenden Einzelergebnissen die Grenzen zu ermitteln, innerhalb deren der wahre Wert wahrscheinlich gelegen ist, sowie auch ziffernmäßig festzustellen, welchen Grad von Genauigkeit die Einzelmessung und der Mittelwert haben. Die Kollektivmaßlehre würde z. B. dazu Verwendung finden können, auf einer Scheibe, auf die eine gewisse Anzahl von Schüssen abgegeben wurde, aus der Lage der Schußlöcher den wahrscheinlichen Ort des Zentrums zu ermitteln. Dieses Beispiel kann vielleicht die Anwendung der genannten Methodik bei anthropologischen Problemen dem Verständnis näher rücken: Sowie der Schütze bei der Abgabe des Schusses gewisse „zufällige" Fehler macht und dadurch trotz seines Bestrebens das Geschoß ins Schwarze zu senden, mehr oder weniger große Abweichungen hievon erreicht, so zielt die „Natur" gewissermaßen darauf hin, einen durch Art und Rasse bestimmten Typus von Mensch zu schaffen, was ihr aber beim Einzelindividuum nur mit mehr oder weniger Annäherung gelingt. So weichen die Einzelindividuen in ihren Körpermaßen voneinander ab und zwar nach den gleichen Gesetzen, die alle anderen zufälligen Fehler beherrschen, das heißt, nach den Gesetzen des Zufalles, die ihren exakten Ausdruck in den Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung finden.

Hiebei werden allerdings gewisse Einschränkungen zu beachten sein. Man weiß, daß die Schußbilder auf Scheiben nicht selten exzentrische Abweichungen der Löcherschaar als Ganzen aufweisen. In solchen Fällen kommt zu den zufälligen Abweichungen eine nicht zufällige, zu den variablen Fehlern beim Zielen und zu der Schußstreuung ein bestimmt gerichteter konstanter Fehler, begründet in fehlerhafter Konstruktion jener Apparate, die der Präzision des Treffens dienen sollen, also des Gewehrlaufes oder des Schützenauges. Solchen nicht zufälligen Schußfehlern vergleichbar wären Abweichungen in den Körpermaßen einer größeren Klasse von Individuen, die unter besonderen, von dem allgemeinen Durchschnitt abweichenden äußeren Bedingungen entstehen und aufwachsen, die etwa besonders ungünstigen Milieueinflüssen, bedingt durch soziale Mißlage oder dgl. ausgesetzt sind.

Die zufälligen Abweichungen folgen — soweit sie bisher näher analysiert wurden — großenteils dem eingangs schon genannten Gesetze, dem Fehlergesetze von Gauß. Die Grundlagen für die Gültigkeit dieses Gesetzes sind folgende:

Es müssen Abweichungen nach der einen Seite gleich wahrscheinlich sein, wie gleich große Abweichungen nach der anderen Seite; es müssen kleine Abweichungen wahrscheinlicher

sein, als größere; es muß ein Maximum für den numerischen Betrag der Abweichungen geben. Diese Bedingungen dürften in unserem Falle, wo es sich um individuelle Verschiedenheiten des Körpergewichtes von Schulkindern sozial gemischter Stände (s. u.) handelt, erfüllt sein. Daraus kann die Gültigkeit des Gauß'schen Gesetzes für unseren Fall natürlich noch nicht erschlossen werden; wir sehen sie aber zunächst, rein heuristisch im Folgenden als gegeben an.

In der Kollektivmaßlehre werden zur Charakterisierung von gewonnenen Zahlreihen unter anderen namentlich die folgenden Indices verwendet:

1. Der Oszillations-Exponent (o) nach Ihering; dieser gibt die Durchschnittsgröße der Einzelabweichung in elementarster Form berechnet an. Wenn δ_1, δ_2, δ_3 etc. die Abweichungen der Einzelmessungen vom arithmetischen Mittel M bedeuten und $\Sigma\delta$ die Summe all dieser Abweichungen ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen, n aber die Anzahl der Einzelmessungen bedeutet, so ist $o = \frac{\Sigma\delta}{n}$.

2. Die mittlere Abweichung (f) der Einzelbestimmung, berechnet nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung; sie beträgt: $f = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}}$

3. Die mittlere Abweichung des arithmetischen Mittels; sie beträgt: $F = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n(n-1)}}$.

4. Die wahrscheinliche Abweichung der Einzelbestimmung; sie beträgt: $r = 0{,}6745 \cdot \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n-1}}$.

Näherungswert: $r' = 0{,}8453 \frac{\Sigma\delta}{n}$

r ist diejenige Abweichung vom Mittelwerte, die bei einer sehr großen Zahl von Einzelmessungen ebenso oft nicht erreicht, wie überschritten werden würde. Die Hälfte aller Einzelwerte muß hiernach zwischen M — r und M + r liegen. Lexis gebraucht für diesen Index r die Bezeichnung „Oszillations-Index".

5. Die wahrscheinliche Abweichung des Mittelwertes; sie beträgt: $R = 0{,}6745 \cdot \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n(n-1)}}$.

Dieser Index hat für den Mittelwert dieselbe Bedeutung, wie r für den Einzelwert; er gibt die „Sicherheit" des Mittelwertes an.

Eine sehr instruktive Uebersicht über Kollektivmaße gewährt endlich ihre vielfach üblich gewordene graphische Dar-

stellung. Man geht hiebei in der Weise vor, daß man die gesamten vorhandenen Einzelwerte nach ihrer absoluten Größe in Stufen scheidet — also in unserem Falle die Körpergewichtswerte in Stufen von etwa Kilogramm zu Kilogramm, oder von Pfund zu Pfund — und die Anzahl der jeder Stufe zufallenden Werte feststellt. Trägt man nun über einer horizontalen Basis (Abszissenachse) mit einer jenen Stufen entsprechenden Einteilung Höhen (Ordinaten) auf, die der Anzahl der in die betreffenden Stufe fallenden Werte proportional sind und verbindet man die so gewonnenen Punkte, so erhält man das sogenannte Variationspolygon. Dieses erhebt sich meist über der dem Mittelwerte entsprechenden Stufe am höchsten und fällt beiderseits nach der Basis zu ab. Je größer die Zahl der Einzelbestimmungen und die Zahl der Untergruppen wird, desto gleichmäßiger wird dieses Polygon und desto mehr nähert es sich einer idealen Kurve. In Zahlenreihen, die dem Fehlergesetz folgen, ist dies die Gauß'sche Kurve. Die allgemeine Form der Gleichung dieser Kurve wurde aus den Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung abgeleitet; sie lautet: $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} . e^{-h^2x^2}$

Die sämtlichen Gauß'schen Kurven unterscheiden sich voneinander also, da π und e (Basis der natürlichen Logarithmen) konstante Größen sind, nur durch den Wert h, der als der Parameter oder die Präzisionskonstante bezeichnet wird. Durch Angabe dieses Parameterwertes als ihres individuellen Stigmas ist jede Gaußkurve bestimmt. Der Parameter und der arithmetische Mittelwert (als Nullpunkt des Koordinatensystems) beschreiben eine dem Fehlergesetz folgende Zahlenreihe einwandfrei und erschöpfend. Der Parameter aber läßt sich leicht aus den früher angegebenen Indices berechnen, z. B. nach folgender Formel: $h = \frac{1}{f\sqrt{2}}$

Aus dem Parameterwerte lassen sich nach der Kurvengleichung noch andere Größen ermitteln, nämlich
die Koordinaten des Scheitelpunktes der Gaußkurve

$$M_o \begin{cases} x_o = O \\ y_o = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

und die Koordinaten ihres Inflexionspunktes

$$x_i = f = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

$$y_i = \frac{h}{\sqrt{e\pi}}$$

Die folgende Faktorentabelle gestattet eine bequeme Berechnung dieser wichtigsten Werte. Die Angaben in Klammern sind die Logarithmen der betreffenden Faktoren.

Gesucht	Gegeben: $f=x_i$	r	h	y_o
$f=x_i=$		$1{,}4826 \cdot r$ (0,17102).	$0{,}70711 \cdot \frac{1}{h}$ (0,84949—1)	$0{,}39895 \cdot \frac{1}{y_o}$ (0,60091—1)
$r=$	$0{,}67449 \cdot f$ (0,82897—1)		$0{,}47693 \cdot \frac{1}{h}$ (0,67846—1)	$0{,}26909 \cdot \frac{1}{y_o}$ (0,42989—1)
$h=$	$0{,}70711 \cdot \frac{1}{f}$ (0,84949—1)	$0{,}47693 \cdot \frac{1}{r}$ (0,67847—1)		$1{,}77245 \cdot y_o$ (0,24857)
$y_o=$	$0{,}39895 \cdot \frac{1}{f}$ (0,60091—1)	$0{,}26909 \cdot \frac{1}{r}$ (0,42989—1)	$0{,}56419 \cdot h$ (0,75142—1)	
$y_i=$	$0{,}24197 \cdot \frac{1}{f}$ (0,38377—1)	$0{,}16321 \cdot \frac{1}{r}$ (0,21274—1)	$0{,}342200 \cdot h$ (0,53428—1)	$0{,}60653 \cdot y_o$ (0,78285—1)

Zur Konstruktion der Gauß'schen Kurven für unser gegebenes Material bedienten wir uns der gleichen Methode wie Riedel. Durch Integrieren der oben angegebenen Kurvengleichung erhält man:

$$w(x_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{hx_1} e^{-h^2x^2} \, d(hx)$$

Dieser Ausdruck gibt den Flächeninhalt der unter der Kurve zwischen den Punkten $+ X_1$ und $- X_1$ gelegenen Fläche an, das ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebiger einzelner Messungswert eine zwischen $M + x$ und $M - x$ gelegene Größe hat. Durch Multiplikation dieses Wertes $w(x_1)$ mit der halben Gesamtzahl der Fälle $\frac{n}{2}$ oder mit $\frac{1000}{2}$ erhält man die absolute, bzw. die Promillezahl (z_1) der zwischen dem Mittelwert und dem X_1-Werte auf der Flanke der Plusvarianten, sowie auf jener der Minusvarianten zu gewärtigenden Fälle. Die Differenz von zwei solchen z-Werten, berechnet für Abszissen, die um je eine Maßeinheit voneinander abstehen, ergibt die theoretische Zahl der jener Stufe zugehörigen Einzelfälle, d. i. die

Ordinate der Gauß'schen Kurve. Der Gebrauch von Tabellen, die für jedes in Betracht kommende Argument den Wert des obigen Integrals direkt ablesen lassen, gestaltet diese Bestimmungen relativ einfach. Verwendet wurde die von B. Kaempfe (im Verlag von W. Engelmann in Leipzig 1893) herausgegebene Integraltabelle. Ein Beispiel der angegebenen Berechnungsart findet man bei Riedel.

Das Kindermaterial zu meinen Untersuchungen ist mit jenem Riedels nahezu identisch; die Sammlung der Daten geschah gemeinsam unter Mithilfe von vier weiteren Kollegen. Es wurden mit Erlaubnis der kgl. Lokalschulkommission und unter freundlicher Vermittlung der Herren Oberlehrer — welchen Instanzen an dieser Stelle hiefür ergebener Dank ausgesprochen sei — vorhandene Messungen benützt. Diese Messungen waren von den Klassenlehrern dreier Münchner Volksschulen (Domschule, Guldeinschule, Stielerschule) nach schulbehördlicher Vorschrift an den Schulrekruten vorgenommen und auf den von den Schulärzten geführten „Gesundheitsbogen" eingetragen worden. Zu den Bestimmungen des Körpergewichtes hatten Dezimalwagen gedient. Das Vorgehen bei der Wägung ist hinsichtlich des Bekleidungszustandes der Kinder allerdings kein durchaus gleichmäßiges gewesen. Eine genaue Erhebung stellte diese Verhältnisse aber im Einzelnen nachträglich fest und gestattete die gesammelten Daten durch allfällige Abzüge für das durchschnittliche Gewicht der Unterkleidung und Beschuhung, das ad hoc ermittelt wurde, auf ein gleiches, gemeinsames Niveau, nämlich auf Nacktgewicht zu reduzieren.

Nebst dieser Reduktion, aber von ihr getrennt, wurde auf den angelegten Zählkarten noch eine zweite Reduktion vorgenommen, die „Altersreduktion". Wie schon von Riedel dargelegt wurde, geht es nicht an, die individuellen Schwankungen von relativ rasch veränderlichen Körpermaßen an einem Material zu studieren, das überdies temporären, nämlich Altersschwankungen unterworfen ist. Die Gewichtsdifferenzen der in einer Schulklasse oder in einer zwölfmonatlichen Altersgruppe vereinten Kinder gehen ja zu einem nicht unbeträchtlichen Teile auf die Altersdifferenzen zurück. Um die individuellen Abweichungen rein darstellen zu können, müssen die Altersdifferenzen erst ausgeglichen werden und da wir natürlich nicht in der Lage waren, Tausende von Wägungen zu benützen, die bei genau gleich alten Kindern gemacht worden waren, mußten wir an den Gewichtsdaten auch eine Korrektur anbringen, die hinsichtlich des Wägungsalters nachträglich gleiche Basis schafft.

Hiebei wurde mit Sorgfalt vorgegangen. Wir erkannten, daß es nicht anging, solche Alterskorrektur nach Daten vorzuneh-

men, die über den Gewichtszuwachs von beliebigen anderen Kindern der in Betracht kommenden Altersperiode vorliegen; wir erhoben daher die Durchschnittszuwachswerte gesondert an dem Material jeder Schülergruppe für sich. Fast sämtliche Kinder, über die wir Daten erhalten konnten, waren zur Zeit der Wägung $5^{7}/_{12}$ bis $7^{6}/_{12}$ Jahre alt gewesen. Wir bildeten für Knaben und für Mädchen je zwei Altersgruppen, nämlich eine untere von $5^{7}/_{12}$ bis $6^{6}/_{12}$ und eine obere von $6^{7}/_{12}$ bis $7^{6}/_{12}$ Jahren, berechneten das mittlere Alter in beiden Klassen und die Differenz der mittleren Körpergewichte. Hieraus ergab sich dann der durchschnittliche Monatszuwachs für die Besucher der betreffenden Schule. Dieser Monatszuwachs bildete die Grundlage zur Alterskorrektur. Die Korrektur erfolgte in der unteren Altersklasse auf $6^{0}/_{12}$ Jahre, in der oberen auf $7^{0}/_{12}$ Jahre, indem für jeden (ganzen) Monat, der zwischen dem 7. bzw. 8. Geburtstage*) des Kindes und dem Tage der Wägung lag, der Monatszuwachs in Abzug gebracht, bzw. hinzugerechnet wurde. Der mittlere Monatszuwachs betrug für die

	Knaben	Mädchen
der Domschule	0,14	0,1
der Guldeinschule	0,09	0,1 kg
der Stielerschule	0,09	0,08

Nach Vornahme dieser beiden Reduktionen, deren Fehlergrenzen innerhalb der Fehlergrenzen der Körpergewichtsbestimmung liegen, standen uns reine, vergleichbare Zahlen über das Nacktgewicht der Kinder mit genau 6 bzw. 7 Jahren zur Verfügung.

Das von den drei Schulen gesammelte Material beläuft sich auf:

1128 6-jährige } zusammen 1854 Knaben
726 7-jährige }
950 6-jährige } zusammen 1844 Mädchen
894 7-jährige }
} somit 3698 Kinder.

Eine der drei genannten Schulen wird vorwiegend von Kindern der Arbeiterbevölkerung des Viertels besucht, eine andere zählt zu jenen, deren Klientel im Durchschnitt relativ begünstigten sozialen Schichten angehört, die dritte nimmt in dieser Hinsicht eine Mittelstellung ein, sodaß die Gesamtheit der gewonnenen Daten wohl ungefähr sozialen Durchschnittsverhältnissen an den öffentlichen Volksschulen der Stadt entspricht.

Der Sammlung des Materiales und der Reduktion der Werte in der angegebenen zweifachen Richtung (auf rundes Alter und auf Nacktgewicht) folgte die rechnerische Bearbeitung. Es wurden für jede Altersgruppe beider Geschlechter die oben angeführten und kurz definierten Indices berechnet und es wurde wei-

*) Tag der Geburt = erster Geburtstag.

terhin für jede Körpergewichtsstufe von $^1/_2$ zu $^1/_2$ Kilogramm in jeder Gruppe die Anzahl der einschlägigen Fälle erhoben. Endlich wurde auch die nach den Gauß'schen Gesetze zu gewärtigende Zahl von Fällen ermittelt (Integralmethode s. o.). Die Ergebnisse dieser Ermittlungen sind in den Tabellen A—D dargelegt. Die Zahl der in jeder Gewichtsstufe angetroffenen und der nach dem Fehlergesetze zu gewärtigenden Einzelfälle sind sowohl absolut als in Promillwerten angegeben. Nach den beiden Reihen von Promillwerten sind auf den Tafeln A—D einerseits die beobachteten Variationspolygone (in gestrichelter Linie), anderseits die theoretischen Gaußkurven (in ausgezogener Linie) zur Darstellung gebracht. Diese Kurven sind auch untereinander (weil auf eine Gesamtzahl von je 1000 Fällen bezogen) direkt vergleichbar. Um die Stufenzahlen nicht allzu klein werden zu lassen, sind bei der nach Beobachtung gezeichneten Kurve je zwei benachbarte Gewichtsstufen zusammengezogen. Damit dadurch die Ordinatenhöhe nicht doppelt so groß werde, wurde für diese beobachtete Kurve der Höhenmaßstab (rechts) auf die Hälfte reduziert gegenüber dem für die theoretische Kurve geltenden Höhenmaßstab (links).

Der Vergleich der Variations-Polygone mit den berechneten Gaußkurven hat hinsichtlich der Körperlänge nach der von Riedel ausgeführten Berechnung und Darstellung eine sehr befriedigende Uebereinstimmung ergeben; es konnte daraus, wie eingangs erwähnt, gefolgert werden, daß die Variation der Körperlänge dem Fehlergesetz folge. Hinsichtlich des Körpergewichtes schienen überraschender Weise andere Verhältnisse vorzuliegen. Ein Blick auf die Kurventabellen I, II, III und IV zeigt, daß die Uebereinstimmung der beiden Kurven keine befriedigende ist. Namentlich steigt das Variations-Polygon in jedem der vier Fälle zum Teil beträchtlich höher an als die Gaußkurve. Die stetige Wiederkehr dieses Verhaltens mußte uns daran zweifeln lassen, ob die Variation des Körpergewichtes nach der Fehlerfunktion gehe. Wir mußten erwägen, ob etwa anstelle der Gaußfunktion eine der von Pearson angegebenen komplizierteren Fehlerfunktionen in Betracht kommt — eine Möglichkeit, die von Ranke und Greiner allerdings für derartige Fälle a priori abgelehnt worden ist.

Zunächst fragten wir uns aber, ob etwa bloß Details in der Disposition des Materiales und der Berechnungsweise die eigentümliche Abweichung bedingen. Um darüber ins Klare zu kommen, wurde das Material über die 7-jährigen Mädchen insoferne abweichend neu behandelt, als wir die Stufen nun symmetrisch um das arithmetische Gewichtsmittel gruppierten und für die Berechnung der Gauß-Kurve doppelt so groß als früher wählten. Eine nach diesem abgeänderten Verfahren ausgearbeitete Darstellung (Kurventafel V Tabelle E) zeigt genau dieselbe

Unstimmigkeit wie vorerwähnt. Daran konnte es also nicht liegen.

Die Aufklärung konnte endlich in Folgendem gefunden werden:

Bei der Berechnung der Präzisionskonstante aus dem Werte des mittleren Fehlers, also aus der Summe der Quadrate der Abweichungen kann es vorkommen, daß in Reihen gleich den unseren besonders hohe Maximal- oder Minimalwerte die Größe der Präzisionskonstante drücken. In der Reihe über die siebenjährigen Knaben beispielsweise findet sich eine Abweichung, die 10 kg beträgt, und finden sich drei Abweichungen, die noch größer sind. Diese Fälle geben bei der Quadrierung naturgemäß einen sehr starken Ausschlag. (Die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer relativ so geringen Anzahl normaler Beobachtungen vier so starke Abweichungen vorkommen, ist äußerst gering. Bei einer Präzisionskonstante von 0,3 würden erst bei 150,000 Fällen drei Abweichungen über 10 kg zu erwarten sein.) Um nun den Einfluß dieses Faktors auf die Präzisionskonstante auszuschalten, bzw. einzuschränken, berechneten wir auf Rat von Herrn Oberregierungsrat Rahts (Charlottenburg) nun die Präzisionskonstante nicht aus dem mittleren Fehler, sondern aus dem durchschnittlichen Fehler o (= Oszillationsexponent) sowie aus dem wahrscheinlichen Fehler r'. Hiezu dienen die Formeln:

$$h = \frac{1}{o \cdot \sqrt{\pi}}$$

$$h = \frac{\rho_o}{r'} \quad \left(\rho_o \text{ aus } \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_o^{\rho_o} e^{-t^2} dt \quad 0{,}476936 \right)$$

Diese Berechnungsweise liefert für die 7-jährigen Knaben eine Präzisionskonstante von h = 0,2974. (Einen ähnlichen Wert nämlich h = 0,3105 – Tabelle F – erhält man auch, wenn man nach dem ursprünglichen Verfahren vorgeht, aber unter Weglassung der hohen Abweichungen von gegen 10 kg).

Auf der Kurventafel VI ist das beobachtete Polygon neben einer Gaußkurve, berechnet unter Zugrundelegung eines runden Wertes von h = 0,3 dargestellt. Man erkennt nun eine „für die verhältnismäßig geringe Zahl von Beobachtungen genügende Uebereinstimmung" (Rahts).

Sonach liegt ein Grund anzunehmen, daß sich unsere Variationen abweichend vom Gauß-Gesetz verhalten, nicht vor und ist die ursprünglich gefundene Unstimmigkeit nur auf die erwähnten extremen Fälle zu beziehen, die ohne Zweifel pathologischen Abweichungen im engeren Sinne des Wortes zugehören und als solche die Variation stören.

Tabelle A. Knaben, 6 Jahre.

Körpergewicht in kg auf ½ kg abgerundet	Anzahl der Fälle absolut beob.	absolut berech.	relativ ‰ beobachtet	relativ ‰ berech.	Daten zur Berechnung der Gauß-Kurve $(M-G)^2$ oder $(G-M)^2$ $\vartheta^2 \times \nu = \nu\vartheta^2$
10.5	—	0.11	—	0.1	
11	—	0.23	—	0.2	
11.5	1	0.56	0.89	0.5	56.25 × 1 = 56.25
12	—	1.02	—	0.9	
12.5	—	1.80	—	1.6	
13	—	3.16	—	2.8	
13.5	1	5.30	0.89	4.7	30.25 × 1 = 30.25
14	7	8.69	6.22	7.7	25 × 7 = 175.00
14.5	13	13.42	11.55	11.9	20.25 × 13 = 263.25
15	17	19.63	15.10	17.5	16 × 17 = 272.00
15.5	22	28.09	19 55	24.9	12.25 × 22 = 269.50
16	47	38.13	41.67	33.8	9 × 47 = 423.00
16.5	49	49.52	43.45	43.9	6.25 × 49 = 306.25
17	71	61.36	62.94	54.4	4 × 71 = 284.00
17.5	80	72.98	70.92	64.7	2.25 × 80 = 180.00
18	97	83.02	85.99	73.6	1 × 97 = 97.00
18.5	111	90.35	98.40	80.1	2.25 × 111 = 27.75
19	71	94.30	62.94	83.6	0 × 71 = 0.00
19.5	113	93.62	100.20	83.0	0.25 × 113 = 28.25
20	85	89.56	75.36	79.4	1 × 85 = 85.00
20.5	75	81.55	66.49	72.3	2.25 × 75 = 168.75
21	56	71.10	49.65	63.1	4 × 56 = 224.00
21.5	61	59.56	54.08	52.8	6.25 × 61 = 381.25
22	39	47.49	34.57	42.1	9 × 39 = 351.00
22.5	39	36.43	34.57	32.3	12.25 × 39 = 477.75
23	21	26.62	18.62	23.6	16 × 21 = 336.00
23.5	16	18.72	14.19	16.6	20.25 × 16 = 324.00
24	9	12.52	7.98	11.1	25 × 9 = 225.00
24.5	5	8.01	4.43	7.1	30.25 × 5 = 151.25
25	4	4.85	3.55	4.3	36 × 4 = 144.00
25.5	1	3.05	0.89	2.7	42.25 × 1 = 42.05
26	9	1.47	7.98	1.3	49 × 9 = 441.00
26.5	3	0.90	2.66	0.8	56.25 × 3 = 168.75
27	2	0.45	1.77	0.4	64 × 2 = 128.00
27.5	2	0.23	1.77	0.2	72.25 × 2 = 144.50
28	—	0.11	—	0.1	
33	1	—	0.89	—	196 × 1 = 196.00
	n=1128	1127.41	999.16	999.16	1000 $\Sigma\vartheta^2 = 6401.00$

Arithmetisches Gewichtsmittel	M =	19.21
Oszillations-Exponent (Ihering)	o =	1.8556
Mittlere Abweichung des Einzelwertes (zugleich Abszisse der Inflexionspunkte der Gaußkurve)	$f = x_1 =$	± 2.3832
Mittlere Abweichung des arithmetischen Mittels	F =	± 0.0771
Wahrscheinliche Abweichung des Einzelwertes	r =	± 1.6075
(Dieselbe, Näherungswert	r' =	± 1.5678)
Wahrscheinliche Abweichung des arithmetischen Mittels	R =	± 0.0478
Parameter der Gaußkurve (Präzisionskonstante)	h =	0.2968
Scheitelordinate der Gaußkurve	y_0 =	0.1674
Ordinate des Inflexionspunktes	y_1 =	0.1018

Tabelle B. Knaben, 7 Jahre.

Körpergewicht in kg auf ½ kg abgerundet	Anzahl der Fälle				Daten zur Berechnung der Gauß-Kurve
	absolut		relativ ‰		$(M-G)^2$ oder $(G-M)^2$ $\vartheta^2 \times v = v\vartheta^2$
	beob.	berech.	beobachtet	berech.	
11	—	0.07	—	0.1	
11.5	—	0.15	—	0.2	
12	—	0.36	—	0.5	
12.5	—	0.65	—	0.9	
13	1	1.16	1.38 1.38	1.6	49.00 × 1 = 49.00
13.5	1	1.81	1.38	2.5	42.25 × 1 = 42.25
14	2	3.12	2.74 4.13	4.3	36 × 2 = 72.00
14.5	1	4.86	1.38	6 7	30.25 × 1 = 30.25
15	4	7.31	5.51 6.89	10.2	25 × 4 = 100.00
15.5	8	10.82	11.01	14.9	20.25 × 8 = 162.00
16	11	15.10	15.05 26.06	20 8	16 × 11 = 176.00
16.5	15	20.23	20.66	28.0	12.25 × 15 = 183.75
17	30	26.35	41.32 61.98	36.3	9 × 30 = 270.00
17.5	36	32.96	49.58	45.4	6.25 × 36 = 225.00
18	53	39.64	72.99 122.57	54.6	4 × 53 = 212.00
18.5	48	45.88	66.12	63.2	2.25 × 48 = 108.00
19	56	51.04	77.12 143.24	70.3	1 × 56 = 56.00
19.5	66	54.74	90.90	75.4	0.25 × 66 = 16.50
20	64	57.06	88.14 179.04	78 6	0 × 64 = 00.00
20.5	71	56.12	97.79	77.3	0.25 × 71 = 17.75
21	45	53.65	61.97 159.76	73.9	1 × 45 = 45.00
21.5	37	49.30	50.96	67.9	2.25 × 37 = 83.25
22	56	43.71	77.12 128.08	60.2	4 × 56 = 224.00
22.5	30	37.24	41.32	51.3	6.25 × 30 = 187.50
23	23	30.64	31.68 73.00	42.2	9 × 23 = 207.00
23.5	14	24.10	19.28	33.2	12.25 × 14 = 171.50
24	17	18.30	23.41 42.69	25.2	16 × 17 = 272.00
24.5	9	13.43	12.38	18.5	20.25 × 9 = 182.25
25	7	9.44	9.64 22.02	13.0	25 × 7 = 175.00
25.5	5	6.39	6.89	8.8	30.25 × 5 = 151.25
26	2	4.21	2.75 9.64	5.8	36 × 2 = 72.00
26.5	5	2.54	6.89	3.5	42.25 × 5 = 211.25
27	1	1.60	1.38 8.27	2.2	49 × 1 = 49.00
27.5	2	0.87	2.75	1.2	56.25 × 2 = 112.50
28	—	0.51	—	0,7	
28.5	2	0.22	2.75 5.50	0.3	72.25 × 2 = 144.50
29	—	0.15	—	0.2	
29.5	—	0.07	—	0.1	
30	1	—	1.38	—	100 × 1 = 100.00
32	2	—	2.75 4.13	—	156.25 × 2 = 312.50
37.5	1	—	1.38 1.38	—	306.25 × 1 = 306.25
	n=726	725.90	999.70 999.76	1000.0	$\Sigma\vartheta^2 = 4727.52$

Arithmetisches Gewichtsmittel	M =	20.16
Oszillations-Exponent (Ihering)	o =	1.8867
Mittlere Abweichung des Einzelwertes (zugleich Abszisse der Inflexionspunkte der Gauß-Kurve)	f = x_1 =	± 2.5534
Mittlere Abweichung des arithmetischen Mittels	F =	± 0.0948
Wahrscheinliche Abweichung des Einzelwertes	r =	± 1.7222
(Dieselbe, Näherungswert	r' =	± 1.6083
Wahrscheinliche Abweichung des arithmetischen Mittels	R =	± 0.0639
Parameter der Gauß-Kurve (Präzisionskonstante)	h =	0.2769
Scheitelordinate der Gauß-Kurve	y_0 =	0.1559
Ordinate des Inflexionspunktes	y_1 =	0.0948

Tabelle C. Mädchen, 6 Jahre.

Körpergewicht in kg auf ½ kg abgerundet	Anzahl der Fälle				Daten zur Berechnung der Gauß-Kurve
	absolut		relativ ‰		$\left.\begin{matrix}(M-G)^2\\ \text{oder}\\ (G-M)^2\end{matrix}\right\} \vartheta^2 \times \nu = \nu\vartheta^2$
	beob.	berech.	beobachtet	berech.	
10	—	0.09	—	0.1	
10.5	—	0.28	—	0.3	
11	—	0.57	—	0.6	
11.5	—	1.14	—	1.2	
12	—	2.00	—	2.1	
12.5	—	3.52	—	3.7	
13	—	5.61	—	5.9	
13.5	7	8.84	7.37 7.37	9.3	25 × 7 = 175.00
14	7	13.40	7.37 21.05	14.1	20.25 × 7 = 141.75
14.5	13	19.28	13.68	20.3	16 × 13 = 208.00
15	23	26.70	24.21 67.37	28.1	12.25 × 23 = 281.75
15.5	41	35.34	43.16	37.2	9 × 41 = 369.00
16	77	44.93	81.05 143.21	47.3	6.25 × 77 = 481.25
16.5	60	55.10	63.16	58.0	4 × 60 = 240.00
17	74	63.75	77.89 153.68	67.1	2.25 × 74 = 166.50
17.5	72	71.25	75.79	75.0	1 × 72 = 72.00
18	92	76.28	96.84 182.10	80.3	0.25 × 92 = 23.00
18.5	81	78.66	85.26	82.8	0 × 81 = 00.00
19	68	76.95	71.58 135.79	81.0	0.25 × 68 = 17.00
19.5	61	72.48	64.21	76.3	1 × 61 = 61.00
20	68	65.36	71.58 125.28	68.8	2.25 × 68 = 153.00
20.5	51	56.62	53.70	59.6	4 × 51 = 204.00
21	35	46.83	36.84 70.62	49.3	6.25 × 35 = 218.75
21.5	32	37.24	33.69	39.2	9 × 32 = 288.00
22	28	28.31	29.47 49.47	29.8	12.25 × 28 = 343.00
22.5	19	20.62	20.00	21.7	16 × 19 = 304.00
23	12	14.44	12.63 21.05	15.2	20.25 × 12 = 243.00
23.5	8	9.69	8.42	10.2	25 × 8 = 200.00
24	6	6.18	6.32 8.42	6.5	30.25 × 6 = 181.50
24.5	2	3.80	2.10	4.0	36 × 2 = 72.00
25	1	2.18	1.05 6.31	2.3	42.25 × 1 = 42.25
25.5	5	1.33	5.26	1.4	49 × 5 = 245.00
26	—	0.57	—	0.6	
26.5	—	0.38	—	0.4	
27	2	0.19	2.10	0.2	72.25 × 2 = 144.50
27.5	—	0.09	- -	0.1	
28	1	—	1.05 3.15	—	90.25 × 1 = 90.25
31.5	2	—	2.10	—	169 × 2 = 338.00
32.5	1	—	1.05 3.15	—	196 × 1 = 196.00
33	1	—	1.05 1.05	—	210.25 × 1 = 210.25
	n=950	950.00	999.98 999.98	1000.0	$\Sigma\vartheta^2 = 5709.75$

Arithmetisches Gewichtsmittel	M =	18.55
Oszillations-Exponent (Ihering)	o =	1.8752
Mittlere Abweichung des Einzelwertes (zugleich Abszisse der Inflexionspunkte der Gaußkurve)	f = x_i =	± 2.4528
Mittlere Abweichung des arithmetischen Mittels	F =	± 0.0796
Wahrscheinliche Abweichung des Einzelwertes	r =	± 1.6544
(Dieselbe, Näherungswert	r' =	± 1.5852)
Wahrscheinliche Abweichung des arithmetischen Mittels	R =	± 0.0537
Parameter der Gaußkurve (Präzisionskonstante)	h =	0.2884
Scheitelordinate der Gaußkurve	y_0 =	0.1626
Ordinate des Inflexionspunktes	y_1 =	0.0987

Tabelle D. Mädchen 7 Jahre.

Körpergewicht in kg auf ½ kg abgerundet	Anzahl der Fälle					Daten zur Berechnung der Gauß-Kurve
	absolut		relativ ‰			
	beob.	berech.	beobachtet		berech.	$(M-G)^2$ oder $(G-M)^2$ $\vartheta^2 \times v = v\vartheta^2$
10	1	—	1.12	1.12	—	90.25 × 1 = 90.25
10.5	—	—	—		—	
11	—	0.09	—		0.1	
11.5	—	0.27	—		0.3	
12	1	0.54	1.12		0.6	56.25 × 1 = 56.25
12.5	—	0.98	—	2.24	1.1	
13	1	1.79	1.12		2.0	42.25 × 1 = 42.25
13.5	4	3.13	4.47	8.98	3.5	36 × 4 = 144.00
14	4	5.10	4.47		5.7	30.25 × 4 = 121.00
14.5	7	7.96	7.83	16.78	8.9	25 × 7 = 175.00
15	8	12.16	8.95		13.6	20.25 × 8 = 162.00
15.5	16	17.52	17.90	36.92	19.6	16 × 16 = 256.00
16	17	24.32	19.02		27.2	12.25 × 17 = 208.23
16.5	21	32.36	23.49	71.59	36.2	9 × 21 = 189.00
17	43	41.21	48.10		46.1	6.25 × 43 = 268.75
17.5	59	50.33	65.96	136.23	56.3	4 × 59 = 236.00
18	63	58.91	70.47		65.9	2.25 × 63 = 141.75
18.5	90	66.07	100.69	182.24	73.9	1 × 90 = 90.00
19	73	71.07	81.55		79.5	0.25 × 73 = 18.25
19.5	89	74.20	99.45	174.76	83.0	0 × 89 = 00.00
20	67	72.41	75.01		81.0	0.25 × 67 = 16.75
20.5	60	68·57	67.11	142.12	76.7	1 × 60 = 60.00
21	67	61.86	75.01		69.2	2.25 × 67 = 150.75
21.5	48	54.62	53.69	96.20	61.1	4 × 38 = 192.00
22	38	45.15	42.51		50.5	6.25 × 38 = 237.50
22.5	43	36.21	48.10	74.95	40.5	9 × 43 = 387.00
23	24	27.21	26.85		31.0	12.25 × 24 = 294.00
23.5	15	20.38	16.76	24.59	22.8	16 × 15 = 240.00
24	7	14.30	7.83		16.0	20.25 × 7 = 141.75
24.5	8	9.74	8.95	15.66	10.9	25 × 8 = 200.00
25	6	6.26	6.71		7.0	30.25 × 6 = 181.50
25.5	4	3.84	4.47	8.94	4.3	36 × 4 = 144.00
26	4	2.32	4.47		2.6	42.25 × 4 = 169.00
26.5	1	1.25	1.12		1.4	49 × 1 = 49.90
27	—	0.71	—	2.24	0.8	
27.5	1	0.36	1.12		0.4	64 × 1 = 64.00
28	1	0.18	1.12		0.2	72.25 × 1 = 72.25
28.5	—	0.09	—	2.24	0.1	
29.5	1	—	1.12		—	100 × 1 = 100.00
32.5	1	—	1.12	2.24	—	169 × 1 = 169.00
33.5	1	—	1.12		—	196 × 1 = 196.00
	n=894	893.47	990.90	990.90	1000.0	$\Sigma\vartheta^2$ = 5263.25

Arithmetisches Gewichtsmittel . . . . . M = 19.61
Oszillations-Exponent (Ihering) . . . . . o = 1.8417
Mittlere Abweichung des Einzelwertes (zugleich Abszisse der Inflexionspunkte der Gaußkurve) . . . . . f = x_1 = ± 2.4276
Mittlere Abweichung des arithmetischen Mittels . . . . F = ± 0.0812
Wahrscheinliche Abweichung des Einzelwertes . . . . . r = ± 1.6374
(Dieselbe, Näherungswert . . . . . r' = ± 1.5567)
Wahrscheinliche Abweichung des arithmetischen Mittels R = ± 0.0548
Parameter der Gaußkurve (Präzisionskonstante) . . . . h = 0.2914
Scheitelordinate der Gaußkurve . . . . . y_0 = 0.1643
Ordinate des Inflexionspunktes . . . . . y_1 = 0.0997

Tabelle E. Mädchen 7 Jahre.

(Kilogrammstufen.)

Abgerundetes Körpergewicht in kg.	Anzahl der Fälle			Daten zur Aufstellung der Gauß-Kurven		
	absolut	relativ °/₀₀		ϑ^2	v	$\vartheta^2 \times v$
	beobachtet	berechnet	beobachtet			
9.6	1	—	1.12	100	1	100
10.6	—	0.1	—	—	—	—
11.6	—	0.7	—	—	—	—
12.6	1	2.4	1.12	49	1	49
13.6	7	7.5	7.84	36	7	252
14.6	14	19.3	15.66	25	14	350
15.6	27	41.8	30.24	16	27	432
16.6	59	76.3	65.96	9	59	531
17.6	116	117.2	129.68	4	116	464
18.6	149	151.8	166.56	1	149	149
19.6	166	165.8	185.70	0	166	000
20.6	127	151.8	142.24	1	127	127
21.6	101	117.2	113.42	4	101	404
22.6	67	76.3	75.01	9	67	603
23.6	30	41.8	33.12	16	30	480
24.6	15	19.3	16.76	25	15	375
25.6	6	7.5	6.71	36	6	216
26.6	4	2.4	4.47	49	4	196
27.6	2	0.7	2.24	64	2	128
28.6	—	0.1	—	—	—	—
29.6	1	—	1.12	100	1	100
30.6	—	—	—	—	—	—
31.6	—	—	—	—	—	—
32.6	1	—	1.12	169	1	169
	n=894	1000	1000.21			5125

Mittelgewicht M = 19.6

Präzisionskonstante h = 0.2952

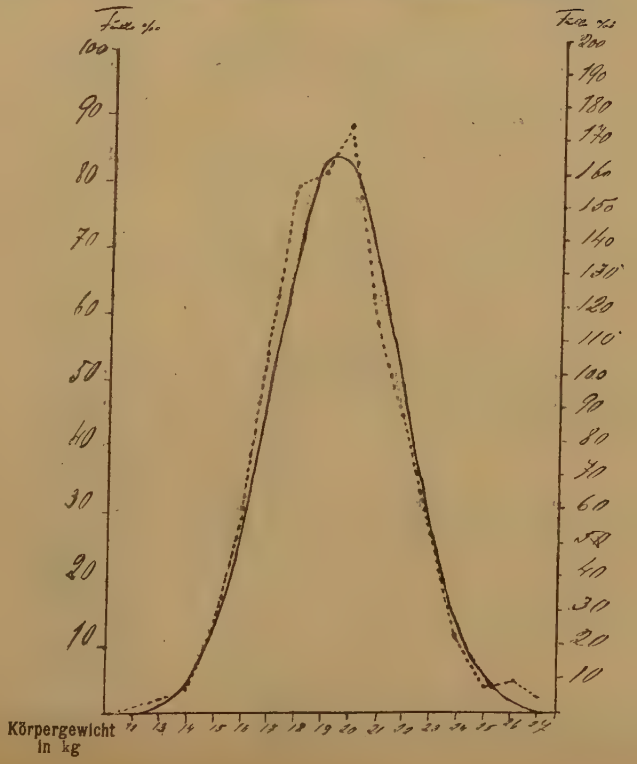
Tabelle F. Knaben 7 Jahre.

Körpergewicht in kg	Anzahl der Fälle			Daten zur Aufstellung der Gauß-Kuren		
	absolut	relativ ‰		ϑ	v	$\vartheta \times v$
	beobachtet	berechnet	beobachtet			
13	1	0.8	1.4 :2= 0.7	7	1	7
13.5	1	1.6	1.4|.2	6.5	1	6.5
14	2	2.8	2.8∫·2= 2.1	6	2	12
14.5	1	4.8	1.4|.2	5.5	1	5.5
15	4	7.8	5.5∫·2= 3.4	5	4	20
15.5	8	12.1	11.0|.2	4.5	8	36
16	11	17.9	15.1∫·2=13.0	4	11	44
16.5	15	25.4	20.6|.2	3.5	15	52.5
17	30	34.5	41.4∫·2=31.0	3	30	90
17.5	36	44.8	49.6|.2	2.5	36	90
18	53	55.6	73.0∫·2=61.3	2	53	106
18.5	48	66.0	66.1|.2	1.5	48	72
19	56	74.9	77.1∫·2=71.6	1	56	56
19.5	66	81.2	90.9|.2	0.5	66	33
20	64	84.3	88.1∫·2=89.5	0	64	00
20.5	71	83.6	97.8|.2	0.5	71	55.5
21	45	79.3	62.0∫·2=79.9	1	45	45
21.5	37	71.9	50.9|.2	1.5	37	35.5
22	56	62.4	77.1∫·2=64.0	2	56	112
22.5	30	51.7	41.3|.2	2.5	30	75
23	23	41.5	31.7∫·2=36.5	3	23	69
23.5	14	31.1	19.2|.2	3.5	14	49
24	17	22.5	23.4∫·2=21.3	4	17	68
24.5	9	15.6	12.4|.2	4.5	9	40.5
25	7	10.3	9.6∫·2=11.0	5	7	35
25.5	5	6.5	6.9|.2	5.5	5	27.5
26	2	4.0	2.7∫·2= 4.8	6	2	12
26.5	5	2.3	6.8|.2	6.5	5	32.5
27	1	1.3	1.4∫·2= 4.1	7	1	7
27.5	2	0.5	2.8 :2= 1.4	7.5	2	15
	n=720	1000				$\Sigma\vartheta$ =1309.0

Mittelgewicht	M=	20.09
Oszillationsexponent (Jhering)	O=	1.8180
Wahrscheinliche Abweichung d. Einzelwertes	r'=	1.5367
Präzisionskonstante	h=	0.3105

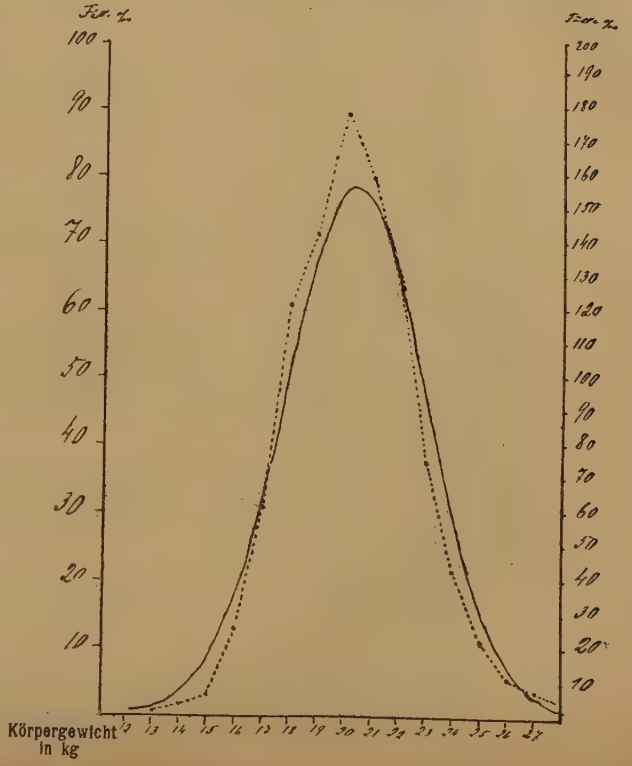
Tafel I. Knaben, 6 Jahre.

Theoretische Gaußkurve —— (Maßstab links).
Beobachtetes Variationspolygon ----- (Maßstab rechts).



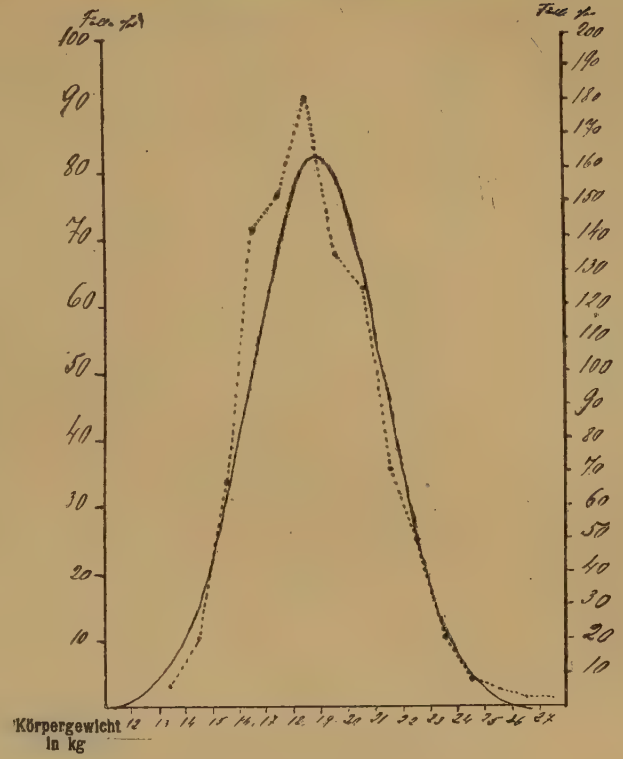
Tafel II. Knaben, 7 Jahre.

Theoretische Gaußkurve —— (Maßstab links).
Beobachtetes Variationspolygon ----- (Maßstab rechts).



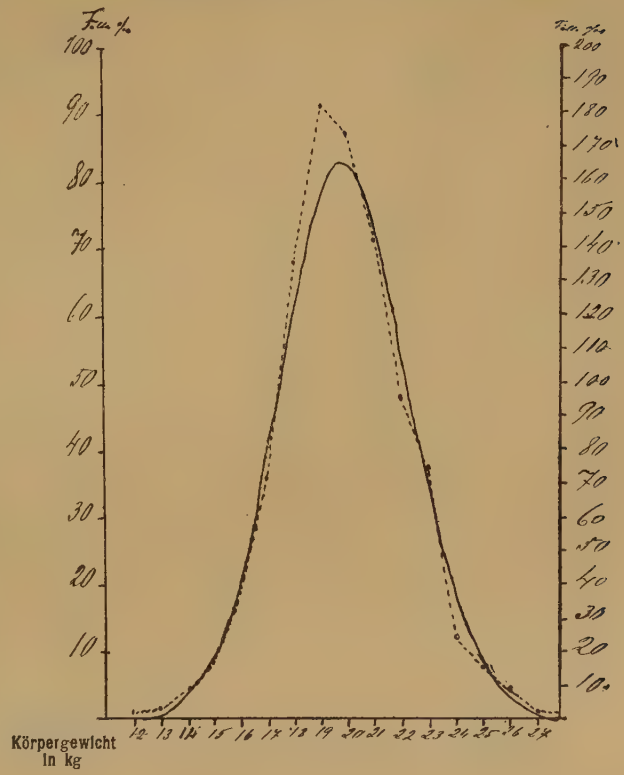
Tafel III. Mädchen 6 Jahre.

Theoretische Gaußkurve —— (Maßstab links).
Beobachtetes Variationspolygon ----- (Maßstab rechts).



Tafel IV. Mädchen, 7 Jahre.

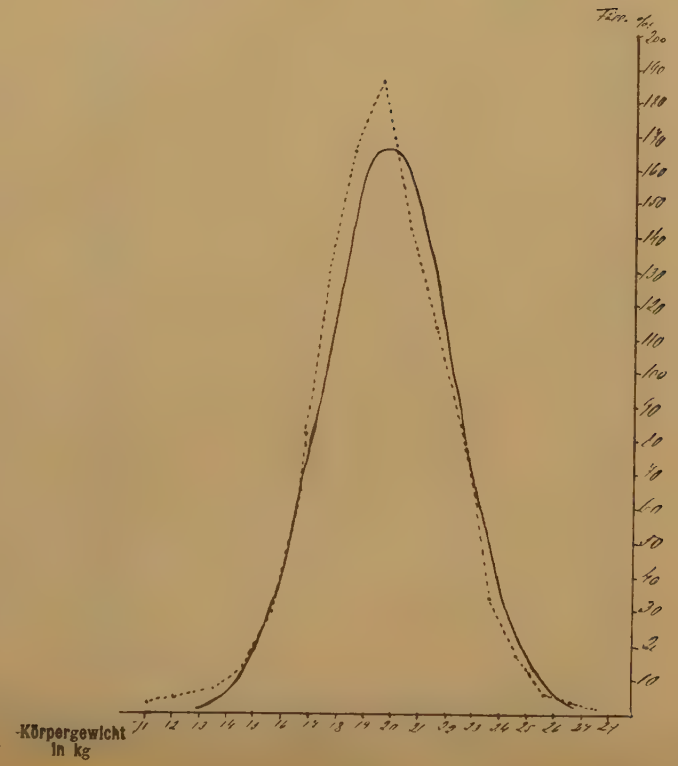
Theoretische Gaußkurve —— (Maßstab links).
Beobachtetes Variationspolygon ----- (Maßstab rechts).



Tafel V. Mädchen, 7 Jahre.

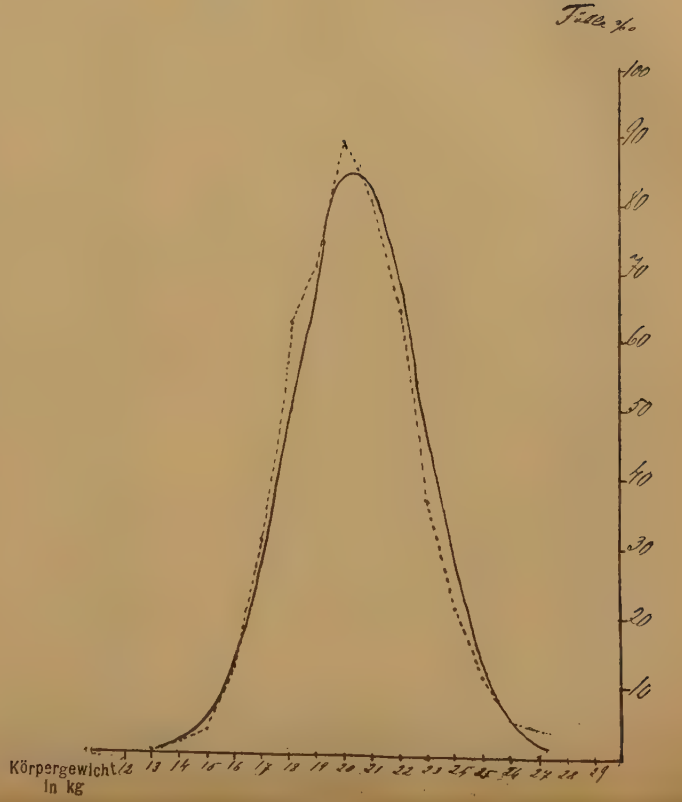
Berechnet ——
Beobachtet -----

(Kilogrammstufen.)



Tafel VI. Knaben, 7 Jahre.

Berechnet ——
Beobachtet -----



Zum Schluß möchte ich meinem hochverehrten Lehrer Professor Dr. M. von Pfaundler für die freundliche und weitestgehende Unterstützung und Leitung, sowie Herrn Oberregierungsrat Rahts für seine gefällige Auskunft meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Literatur.

Riedel E., Die Körperlänge von Münchner Schulkindern, dargelegt nach den Prinzipien der Kollektivmaßlehre. München 1913, Rudolph Müller & Steinicke.

Stieda, Ueber die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der anthropologischen Statistik. Archiv für Anthropologie, Bd. 14, 1883.

Geißler und Uhlitzsch, Die Größenverhältnisse der Schulkinder etc. Zeitschr. d. K. sächs. statist. Büros, 34. Jahrgang, 1888.

K. E. Ranke und Greiner, Das Fehlergesetz und seine Verallgemeinerung durch Fechner und Pearson in ihrer Tragweite für die Anthropologie. N. F., Bd. 2, 1904.

Lebenslauf.

Ich, Awrum Skibinski, bin zu Diedowstschino, Gouv. Kieff, im Jahre 1881 geboren. 1907 absolvierte ich privat. das Gymnasium in Kieff. Im gleichen Jahre begab ich mich nach Zürich, wo ich ein Semester Medizin studierte. Vom Jahre 1910 an studierte ich Medizin an der Kgl. Universität zu München.